

## 1) Exercice

---

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système d'inconnue  $(x, y)$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y+2} = 3 \\ \frac{-2}{x+3} + \frac{4}{y+2} = -2 \end{cases}$$

## 2) Exercice

---

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer  $A^3 - 3A^2 + 3A - I$ .

2 - En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse  $A^{-1}$ .

## 3) Exercice

---

Étant donné trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

À quelle(s) condition(s) est-elle inversible ?

## 4) Exercice

---

On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 - Calculer  $J^2$  et  $J^3$ . En déduire  $J^k$  où  $k$  est un entier supérieur ou égal à 3.
- 2 - On pose :  $T = 2I + J$ . Donner, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $T^n$ .
- 3 - On considère les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par récurrence de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$$

Donner, en utilisant le résultat de la question précédente, les expressions de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .

## 5) Exercice

---

On considère deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi que les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on note :  $M = \alpha A + \beta B$ .

- 1 - Calculer  $M^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2 - Existe-t-il une valeur de  $n$  telle que  $M^n$  soit inversible ?

## 6) Exercice

---

Étant donné un paramètre réel  $\lambda$ , on considère la matrice :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 & 1 \\ 3 & -2 - \lambda & -4 \\ -2 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

On note  $E(\lambda)$  l'ensemble des matrices  $X$  de  $\mathcal{M}_{3,1}$  telles que  $A_\lambda X = \lambda X$ . Déterminer cet ensemble suivant les valeurs de  $\lambda$ .

## 7) Exercice

---

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

2 - Si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ), démontrer que :

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$$

## 8) Exercice

---

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  puis  $A^n$  pour  $n$  entier strictement positif quelconque.

2 - La matrice  $A$  est-elle inversible ?

## 9) Exercice

---

Étant donné un paramètre réel  $m$ , on considère la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & m \end{pmatrix}$$

1 - Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $A_m$  est inversible.

2 - Dans le cas où  $m$  est nul, calculer  $A_0^{-1}$ .

## 10) Exercice

---

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n$  est dite nilpotente si et seulement s'il existe un entier  $p$  strictement positif tel que  $A^p = 0$ . Montrer que, dans ces conditions, la matrice  $I_n - A$  est inversible et déterminer son inverse.

## 11) Exercice

---

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $n$  réels non nuls  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et la matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{i, n+1-i} = \alpha_{n+1-i} \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad j \neq n+1-i \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Démontrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

## 12) Exercice

---

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la matrice de  $\mathcal{M}_n$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & n-1 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

## 13) Exercice

---

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et par  $a$  et  $b$  deux nombres réels distincts. Déterminer les matrices qui commutent avec les matrices diagonales suivantes :

- 1 -  $\text{diag}(1, 2, \dots, n)$  dans  $\mathcal{M}_n$
- 2 -  $\text{diag}(a, a, b, b)$  dans  $\mathcal{M}_4$
- 3 -  $\text{diag}(a, b, a, b)$  dans  $\mathcal{M}_4$

## 14) Exercice

---

Étant donné deux réels  $a$  et  $b$  non nuls et un entier naturel non nul  $n$ , on considère la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n$  dont tous les termes sont égaux à 1. On pose alors :  $B = a.I_n + b.A$ , où  $I_n$  désigne la matrice unité d'ordre  $n$ .

- 1 - Calculer  $B^p$  en fonction de  $A$  et  $I_n$  pour tout entier naturel  $p$ .
- 2 - Déterminer une relation entre  $B^2$ ,  $B$  et  $I_n$ .
- 3 - Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur  $a$  et  $b$  pour que  $B$  soit inversible. Donner alors  $B^{-1}$ .
- 4 - La relation obtenue à la question 1 se généralise-t-elle pour  $p$  entier négatif ?