

SUITES NUMÉRIQUES

1. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^{n^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^{n^3}$$

2. Soit q un réel strictement positif. Étudier le sens de variation de la suite $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}}$. A-t-elle un minimum, un maximum, des bornes inférieure et supérieure ?

3. On considère les deux suites :

$$\begin{cases} u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n \\ v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) \end{cases}$$

Démontrer qu'elles sont adjacentes. En déduire un équivalent simple de la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, où :

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

On note :

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, I =]\alpha, 1] \text{ et } J =]0, \alpha[$$

Démontrer que tous les termes de rang pair appartiennent à I et que tous les autres sont dans J . Qu'en est-il de la convergence de la suite ?

5. Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

6. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 3, u_2 = 11 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad n \geq 3 \Rightarrow u_n = (2n+1)u_{n-1} - n^2u_{n-2} \end{cases}$$

a. Soit, pour $n \geq 2$:

$$v_n = u_n - (n+1)u_{n-1}$$

Calculer v_n .

b. Soit :

$$w_n = \frac{u_n}{(n+1)!}$$

Calculer w_n .

c. En déduire u_n .

7. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{8}{u_n}} \end{cases}$$

On pourra penser à la fonction logarithme népérien.

8. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbf{N} & u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$$

9. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} & u_{n+1} = 3u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

- a. Étudier la monotonie de la suite. Est-elle convergente ?
- b. On pose :

$$v_n = \frac{u_n}{3^n}, w_n = v_{n+1} - v_n \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n w_k$$

- i. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente.
- ii. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente.
- iii. Démontrer enfin qu'il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$u_n \sim \lambda \times 3^n$$