1 ECE | **Exercices** | 2009-2010

Probabilités

1)

On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ? d'obtenir au moins deux rois ?

2)

On compose un code de 4 chiffres choisis entre 0 et 9. Quelle est la probabilité que les chiffres choisis soient tous distincts ? qu'ils forment une suite strictement croissante ?

3)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement sans remise les n boules. Calculer la probabilité de $A =$ "Il n'y a pas de coïncidence entre les numéros des boules et leur rang de sortie".
(Introduire $A_i =$ "La $i^{ème}$ boule tirée porte le numéro i" et exprimer A en fonction des A_i)

4)

Une urne contient 10 boules blanches, 6 rouges et 4 noires.

1 - On tire successivement avec remise 3 boules. Calculer la probabilité des événements suivants :
$A =$ "On obtient trois couleurs différentes".
$B =$ "Le tirage obtenu est bicolore".
$C =$ "Toutes les boules sont de la même couleur".

2 - Reprendre les questions précédentes en supposant que l'on tire simultanément les 3 boules.

5)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement sans remise 2 boules. Calculer la probabilité des événements suivants :

1 - $A =$ "Les boules sortent dans l'ordre de leurs numéros".

2 - $B =$ "Les numéros des boules obtenues sont consécutifs".

6)

On considère 3 urnes : $U_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{2 noires} \\ \text{3 blanches} \end{array} \right.$, $U_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{1 noire} \\ \text{4 blanches} \end{array} \right.$, $U_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{3 noires} \\ \text{4 blanches} \end{array} \right.$

On prend au hasard une boule dans U_1, une boule dans U_2, et on les met dans U_3. On prend ensuite une boule dans U_3. Elle est noire.
Calculer la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit blanche.

7)

Le midi, un élève peut manger à la cantine ou à l'extérieur du lycée. Si au jour n il mange à la cantine, la probabilité qu'au jour $n+1$ il mange à l'extérieur est de $\frac{1}{2}$. Par contre, si au jour n il mange à l'extérieur, alors au jour $n+1$, il mange à la cantine. On suppose que le premier jour, il mange à la cantine.

1 - Calculer la probabilité, notée c_n, qu'au jour n il mange à la cantine.
(chercher une relation entre c_{n+1} et c_n)

2 - Reprendre la question en supposant que le premier jour il mange à l'extérieur.
(Dans cette histoire, il n'y a pas de vacances ni de week-ends et il doit faire un choix tous les midis ...)

8)

Deux personnes lancent chacune n fois une pièce équilibrée.
Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.

9)

On dispose d'une pièce A qui donne "face" avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et d'une pièce B, qui donne "pile" avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On choisit au hasard une pièce et on la lance. Si on obtient "pile" on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une série de lancers. Calculer la probabilité de l'évènement F_n = "On obtient face au $n^{ième}$ lancer" (on pourra introduire A_k = "On utilise la pièce A au $k^{ième}$ lancer")

10)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$).

1 - On tire successivement avec remise p boules (où $p \in [\![2, n]\!]$). Calculer la probabilité de l'événement A :
"Le numéro de la dernière boule est supérieur ou égal aux numéros des autres boules tirées"
(introduire E_k = "Le numéro de la $p^{ième}$ boule tirée vaut k")

2 - Reprendre la question précédente en supposant que les tirages se font sans remise.

11)

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire successivement sans remise les $n = a + b$ boules.

1 - Calculer la probabilité des événements suivants :

a - $A_{1,k}$= "On obtient une $1^{ière}$ blanche au $k^{ième}$ tirage"

b - $A_{2,k}$= "On obtient une $2^{ième}$ blanche au $k^{ième}$ tirage"

c - $A_{j,k}$= "On obtient une $j^{ième}$ blanche au $k^{ième}$ tirage"

2 - En considérant les événements $(A_{j,k})$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{l=0}^{b} \binom{l+j-1}{j-1} \binom{a+b-(l+j)}{b-l} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{j=1}^{a} \binom{k-1}{j-1} \binom{a+b-k}{a-j}$$

12)

Un lot de 100 dés comporte 25 dés qui sont pipés (la probabilité d'obtenir 6 est alors de $\frac{1}{2}$), les autres étant "normaux".
On choisit au hasard un dé, on le lance et on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé choisi soit pipé.

13)

Une puce évolue sur les trois sommets A, B et C d'un triangle. À l'instant $t = 0$, elle est en A. Son déplacement d'un sommet à l'autre dure une seconde et, à chaque instant, elle saute de manière équiprobable sur l'un des deux autres sommets.
On note A_n (resp. B_n et C_n) = "La puce est en A (resp. B et C) à l'instant $t = n$".
On pose $\alpha_n = p\,(A_n)$, $\beta_n = p\,(B_n)$ et $\gamma_n = p\,(C_n)$.

1 - À l'aide des probabilités totales, établir une relation entre α_{n+1} et $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.
Opérer de même pour β_{n+1} *et* γ_{n+1}.

2 - On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

a - Donner l'écriture matricielle du système obtenu dans la question **1**.

b - On note M la matrice ainsi obtenue. Exprimer X_n à l'aide de X_0, M et n.

3 - À l'aide de $N = 2.M + I$, calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4 - En déduire α_n, β_n et γ_n en fonction de n.

14)

Un voyageur se déplace dans trois villes A, B et C. Il met une journée pour aller d'une ville à l'autre. Au premier jour, il se trouve dans la ville A. Si, au jour n, il se trouve dans une des villes, au jour $n + 1$, il se trouve de façon équiprobable dans l'une des deux autres villes.

1 - Soit J_n = "Le voyageur revient pour la première fois dans A au jour n". Calculer $p(J_n)$.

2 - Soit R_A = "Le voyageur revient en A". Calculer $p\,(R_A)$.

15)

Deux joueurs A et B jouent à tour de rôle avec 2 dés honnêtes. A lance les dés. Si la somme des points obtenus est 6, A gagne la partie et le jeu s'arrête. Sinon, B lance les dés. Si la somme des points obtenus par B est 7, B gagne la partie, sinon il passe les dés à A qui rejoue, et ainsi de suite ... On définit les événements suivants :
S_k = "La somme des dés obtenus au $k^{ième}$ tour permet à celui qui lance les dés de gagner."
A_k = "A gagne la partie après avoir lancé pour la $k^{ième}$ fois les dés."
G_A = "A gagne la partie."
B_k = "B gagne la partie après avoir lancé pour la $k^{ième}$ fois les dés."
G_B = "B gagne la partie."

1 - Calculer $p(A_3)$ puis $p(A_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $p(G_A)$.

2 - Calculer $p(B_k)$ puis $p(G_B)$.

3 - Soit C = "La partie ne s'arrête jamais". Calculer $p(C)$.

16)

Une personne lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p (où $p \in \,]0, 1[$). Elle gagne dès qu'elle a obtenu 2 "piles" de plus que de "faces", et elle perd dès qu'elle a obtenu 2 "faces" de plus que de "piles". La partie s'arrête lorsque la personne a gagné ou perdu.

1 - Soit E_{2n} = "Elle a eu autant de "piles" que de "faces" lors des $2n$ premiers lancers".
Calculer $p(E_{2n})$.

2 - Soit G_{2n} = "Elle gagne la partie à l'issue du $2n^{ième}$ lancer". Calculer $p(G_{2n})$.

3 - Quelle est la probabilité que la personne gagne la partie ? qu'elle la perde ?