

**Exercice 1**

Ecrire sans le symbole  $\sum$  les expressions ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^5 k^2, \quad \sum_{j=3}^8 \frac{j^2}{3^j}, \quad \sum_{n=1}^5 (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n}, \quad \sum_{p=3}^5 x(1-x^2)^p, \quad \sum_{s=2}^{s=8} \frac{s^2}{s^2+1}$$

**Exercice 2**

Ecrire les sommes suivantes avec le symbole  $\sum$

$$A = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5 \quad B = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n a^n \quad C = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \dots + \frac{a^{2n}}{2n}$$

$$D = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \dots + \frac{2^{2005}}{2006} \quad E = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \quad F = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$$

**Exercice 3**

Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^n (2k+1), \quad B_n = \sum_{k=0}^{n+1} (6k^2 + 4k + 1), \quad C = \sum_{p=945}^{2005} 3, \quad D_n = \sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1)$$

$$E_n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n} \quad F_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-1)^n 3^n$$

$$G_n = 2.3^2 + 2.3^3 + 2.3^4 + \dots + 2.3^n \quad H_n = -8.7^2 + 8.7^3 - 8.7^4 + \dots + 8.7^{2005} - 8.7^{2006}$$

$$I_n = \sum_{\alpha=0}^n \frac{3}{10^\alpha}, \quad J_n = \sum_{i=0}^{2n} 3 \times 4^{i+1}, \quad K_n = \sum_{j=0}^n \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}, \quad L_N = \sum_{i=0}^{N+1} 3^{2i+1}$$

$$M_n = \sum_{p=2}^n \left(\frac{1}{3}\right)^p, \quad N_n = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k+2}}, \quad O_N = \sum_{n=1}^N (5.2^n + 2.3^{2n}), \quad P_k = \sum_{n=3}^{2k} 2^{3n+1} \cdot \frac{3^{n+1}}{4^n}$$

**Exercice 4**

Vérifier rapidement que les égalités suivantes :  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ,  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$

Calculer alors  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  puis  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

**Exercice 5**

Déterminer trois réels  $a, b, c$  tels que  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$ .

En déduire la valeur de la somme  $\sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}$ .

**Exercice 6**

Soit  $(a_k)_{k \in [0, n]}$  une famille de nombres réels. Justifier l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) - na_n$$

**Exercice 7**

Montrer par récurrence que

$$a) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad c) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$d) \quad (q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad e) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$$

$$f) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad g) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} = n \cdot 2^{n+1} + 1$$

$$h) \quad (a \in \mathbb{R}_+), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geq 1+na, \quad i) \quad \forall n \geq 3, \quad n! \geq 2 \times 3^{n-2} \quad j) \quad \forall n \geq 5, \quad \frac{3^n}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-7}}$$