

- Ex . 1 :** Une entreprise comporte 35 employés dont 19 hommes.
Le comité d'entreprise comporte un président, un secrétaire et un trésorier. Les postes ne sont pas cumulables.
- Déterminer le nombre de bureaux possibles.
 - Déterminer le nombre de bureaux où seul le secrétaire est un homme.
 - Déterminer le nombre de bureaux où le président et le trésorier sont de sexes différents.
- Ex . 2 :** Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 8 cartes. On obtient ainsi une "main".
Le jeu de cartes comporte 4 "couleurs" : carreau, pique, trèfle et cœur.
- Déterminer le nombre de mains possibles.
 - Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un roi.
 - Déterminer le nombre de mains qui contiennent une dame ou un cœur.
 - Déterminer le nombre de mains qui contiennent 2 couleurs au plus.
- Ex . 3 :** On lance 5 fois de suite un dé à 6 faces. On obtient ainsi une suite de 5 numéros.
- Déterminer le nombre de suites que l'on peut obtenir.
 - Déterminer le nombre de suites qui commencent par 2.
 - Déterminer le nombre de suites qui ne contiennent pas 3.
 - Déterminer le nombre de suites qui commencent et finissent par le même chiffre.
 - Déterminer le nombre de suites qui contiennent tous les chiffres sauf 3.
 - Déterminer le nombre de suites qui contiennent tous les chiffres pairs au moins une fois.
- Ex . 4 :** Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement avec remise 6 boules.
- On suppose que les blanches (resp noires) sont numérotées de 1 à 5 (resp de 6 à 13).
 - Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - Déterminer le nombre de tirages avec 5 blanches et 1 noire dans cet ordre.
 - Déterminer le nombre de tirages avec 5 blanches et 1 noire.
 - Déterminer le nombre de tirages avec une noire au plus.
 - Déterminer le nombre de tirages avec 3 blanches et 3 noires.
 - Reprendre les questions précédentes en supposant que les boules d'une même couleur sont indiscernables entre elles.
- Ex . 5 :**
- 3 personnes se partagent 7 pièces de 1 Euro. On suppose, dans un premier temps, qu'une personne peut éventuellement ne rien recevoir. Déterminer le nombre de partages possibles.
En déduire le nombre de partages où chaque personne reçoit au moins une pièce.
 - Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^*$. n personnes se partagent p pièces de 1 Euro, chaque personne pouvant éventuellement ne rien recevoir. Déterminer le nombre de partages possibles.
- Ex . 6 :** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire successivement sans remise les n boules.
Soit A, B et C trois boules fixées parmi celles que contient l'urne.
- Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - Déterminer le nombre de tirages qui contiennent la séquence ABC.
 - Déterminer le nombre de tirages où on peut lire dans le résultat les lettres A, B et C dans cet ordre.

Ex . 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Une urne contient p boules blanches et $n-p$ boules noires. On suppose que les boules d'une même couleur sont indiscernables entre elles.

On tire successivement sans remise les n boules.

- a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
- b) Soit $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. Déterminer le nombre de tirages où la dernière blanche apparaît en k^{ieme} position.
- c) En faisant une partition de l'ensemble des tirages selon la position de la dernière blanche, calculer en fonction de n et p la somme $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$.
- d) Retrouver alors la formule des colonnes.

Ex . 8 : On considère n personnes P_1, P_2, \dots, P_n . Chacune de ces personnes envoie une lettre et une seule à l'une des autres personnes. Une personne peut éventuellement recevoir plusieurs lettres. L'ensemble de ces lettres s'appelle un envoi.

- a) Déterminer le nombre d'envois.
- b) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - Déterminer le nombre d'envois où P_1 reçoit exactement j lettres.
 - Retrouver alors le nombre total d'envois.
- c) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 - Déterminer le nombre d'envois où P_1, \dots, P_k ne reçoivent aucune lettre.
 - En déduire le nombre d'envois où un groupe de k personnes ne reçoit aucune lettre.
- d) Déterminer le nombre d'envois où chaque personne reçoit au moins une lettre.
(Laisser le résultat sous forme de somme)
On pourra utiliser les ensembles $A_i = \{ \text{envois où } P_i \text{ ne reçoit aucune lettre} \}$ avec $1 \leq i \leq n$

Ex . 9 : Soit E un ensemble à n éléments.

- a) Déterminer le nombre de couples (A, B) où A et B sont des parties de E avec $\text{card}(A)=k$ et $A \cap B = \emptyset$ (on pourra choisir A puis B en remarquant que $B \subset \bar{A}$).
- b) En déduire le nombre de couples (A, B) où A et B sont des parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$.

Ex . 10 : Jouer au loto consiste à cocher un ensemble de 6 numéros parmi $\llbracket 1, 49 \rrbracket$. Une fois fait, ce choix s'appelle une grille.

- a) Déterminer le nombre total de grilles.
- b) Soit F l'ensemble des grilles qui ne comportent aucun numéro consécutif.
 - Prouver que $F = \{ (a_1, a_2, \dots, a_6) \in \llbracket 1, 49 \rrbracket^6 \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \quad a_{i+1} \geq 2 + a_i, \}$
 - Soit $G = \{ (i_1, \dots, i_6) \text{ avec } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_6 \leq 44 \}$. Déterminer $\text{Card}(G)$.
 - Pour tout $x = (a_1, a_2, \dots, a_6) \in F$ on pose $f(x) = (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4, a_6 - 5)$.
 - Prouver que $f(x) \in G$.
 - Prouver que l'application f ainsi définie est une bijection de F sur G .
 - En déduire $\text{Card}(F)$.