1 ECE **Devoir surveillé n°6** 2009-2010

Mardi 13 avril 2010 (8h-12h)

1) Exercice

On considère les deux suites $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $T = (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \ln(n\,!) - n\ln n \qquad \text{et} \qquad T_n = S_n + n$$

et l'on se propose de déterminer leurs limites.

1 - On considère la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;1[\qquad f(x) = \ln(1-x) + x + \frac{3}{4}x^2$$

a - Dresser le tableau des variations de f.

b - En déduire que :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right] \qquad \ln(1-x) \geqslant -x - \frac{3}{4}x^2$$

2 - On note E l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et on définit une nouvelle suite $u = (u_n)_{n\in E}$ par :

$$\forall n \in E \qquad u_n = S_n - S_{n-1}$$

a - Que représente la suite S pour la suite u ?

b - Démontrer que :

$$\forall n \in E \qquad u_n = (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

En déduire le signe de u_n. Qu'en déduit-on pour la suite S ?

c - Donner un équivalent de u_n quand n tend vers plus l'infini et en déduire la limite de la suite u.

d - Qu'en déduit-on pour la série de terme général u_n ?

e - Conclure en donnant la limite de la suite S.

3 - On définit une nouvelle suite $v = (v_n)_{n\in E}$ par :

$$\forall n \in E \qquad v_n = T_n - T_{n-1}$$

a - Que représente la suite T pour la suite v ?

b - Exprimer v_n en fonction de u_n. Quelle est la limite de la suite v ?

c - Déterminer, à l'aide des questions $\mathbf{1-b}$, $\mathbf{2-b}$ et $\mathbf{3-b}$, une suite $w = (w_n)_{n\in E}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant 3 \Rightarrow w_n \leqslant v_n \qquad \text{et} \qquad w_n \sim \frac{1}{4n}$$

d - Qu'en déduit-on pour la série de terme général v_n ?

e - Conclure en donnant la limite de la suite T.

2) Exercice

On a fabriqué un robot intelligent, capable d'apprentissage. Quand on lui confie une tâche à accomplir, la probabilité qu'il échoue à son premier essai est p ($p \in]0\,;1[$). S'il échoue, il recommence et la probabilité qu'il échoue à son deuxième essai est $\frac{p}{2}$. Ainsi de suite : s'il a échoué aux $n-1$ premiers essais, la probabilité qu'il échoue au n-ième est $\frac{p}{n}$. Il s'arrête dès qu'il a réussi.
On note R_n l'événement "Le robot réussit son n-ième essai".

1 - Quelle est la probabilité qu'il échoue au premier essai ? au deuxième essai ?
Donner $P(R_1)$ et $P(R_2)$.

2 - Démontrer que, plus généralement :

$$P(R_n) = \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{p^n}{n!}$$

3 - Établir que la série de terme général $nP(R_n)$ est convergente et calculer sa somme.

3) Exercice

n désignant un entier naturel, on note :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

1 - Démontrer que la suite $I = (I_n)_{n \in N}$ est décroissante.

2 - Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

3 - En déduire la limite de la suite I.

4 - Calculer I_0. Déterminer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
On rappelle que :

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

5 - Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. On pourra procéder par intégration par parties et remarquer que :

$$(1-x)^{\frac{3}{2}} = (1-x)\sqrt{1-x}$$

Vérifier la relation obtenue pour la valeur $n = 0$. L'utiliser pour calculer I_2.

6 - Écrire un programme en turbo-Pascal qui demande une valeur de n à l'utilisateur et puis qui affiche la valeur de I_n.