1 ECE **Devoir surveillé n°3** 2009-2010

Corrigé

1) Exercice

Nous avons déjà rencontré cette situation, assimilant un numéro de téléphone à une dix-liste d'éléments de l'ensemble $[\![0;9]\!]$.

1) On choisit tout d'abord la place des 1, **puis** la place des 3 et, de facto, les 7 prennent les 6 places restantes. Cela donne :

$$N_1 = \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} = 45 \times 28 = 1\ 260$$

Les puristes auront multiplié cela par $1^2 \times 1^2 \times 1^6$ obtenant, sans doute (? !), le même résultat.

2) On choisit tout d'abord les deux chiffres qui seront représentés. Ensuite, peu nous chaut où ils vaquent. Seulement veillerons à ce qu'il n'y en ait pas qu'un seul qui soit présent. On obtient :

$$N_2 = \binom{10}{2} \times (2^{10} - 2 \times 1^{10}) = 45 \times 1022 = 45\ 990$$

3) On choisit la place des trois 1 puis on garnit les sept places restantes avec des chiffres quelconques différents de 1. Il vient :

$$N_3 = \binom{10}{3} \times 1^3 \times 9^7 = 573\ 956\ 280$$

et l'on est reconnaissant (je redoute néanmoins une certaine ingratitude) vis-à-vis de ce texte qui nous a épargné les calculs.

2) Exercice

On suppose, bien sûr, qu'étant incultes (eux...), les invités n'ont aucune préférence quant au salon vers lequel se diriger.

1) Répartir les invités dans l'étroit, pardon, les trois salons revient à faire une sept-liste d'éléments de l'ensemble des trois Parques. Il y a donc :

$$N_1 = 3^7 = 2\ 187$$

façons de dispatcher les commensaux (qui ne le seront vraiment qu'une fois passés à table dans le séjour bizarrement squeezé par l'énoncé).

2) Nous choisissons tout d'abord celui des trois salons que A et B honoreront de leur présence puis, les y ayant conviés, nous laisserons les autres hôtes s'égailler au gré de leurs affinités. Nous trouvons :

$$N_2 = \binom{3}{1} \times 1^2 \times 3^5 = 3 \times 3^5 = 3^6 = 729$$

Un autre éclairage aurait été recevable : imaginant que madame B était arrivée en retard (le hasard seul aurait voulu que cela tombât sur elle, la faute à ces maudits escarpins que quelqu'un, sans doute, avait déplacés de façon subreptice), les 6 autres invités, qui étaient là, las de l'espérer, s'étaient répartis, et pour ce faire, avaient eu 3^6 façons. Tout essoufflée (et, en outre, ayant explosé une des talonnettes), madame B n'avait pu que rejoindre son cavalier, étant ainsi privée du choix qu'elle lui aurait sûrement imposé.

3) Nous allons distinguer deux cas disjoints, selon que les hommes sont tous ensemble (tous) ou qu'ils sont répartis dans deux salons. Chaque fois, nous commencerons par choisir (mentalement) le(s) salon(s) masculin(s) puis répartirons les personnes pour que soit respecté le cahier des charges de cette question. Il vient alors :

$$N_3 = \binom{3}{1} \times 1^3 \times 2^4 + \binom{3}{2} \times (2^3 - 2 \times 1^3) \times 1^4 = 3 \times 16 + 3 \times 6 = 66$$

3) Exercice

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la grâce de la conjugaison, obtenons :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2 \times \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et nous en déduisons l'encadrement demandé tant il est vrai qu'une fraction (de nombres positifs) est d'autant plus grande que son dénominateur est plus petit et d'autant plus petite que son dénominateur est plus grand.

2) Il faut, pour cela, établir trois résultats :

a) Qu'une des suites est croissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

quantité qui est positive d'après la question **1**,

b) Que l'autre est décroissante :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

expression négative, toujours d'après la première question,

c) Que la différence des deux suites converge vers zéro :

$$w_n - v_n = 2 \times (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

qui tend bien vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini, encore grâce à l'encadrement obtenu lors du liminaire.

3) Program suite ;
Var
n, i : integer ;
v : real ;
Begin
writeln('Choisissez un entier naturel non nul.') ;
readln(n) ;
v :=0 ;
for i :=1 to n do
$v := v + 1/\text{sqrt}(i)$;
write('v(',n,') = ',$v - 2*\text{sqrt}(n+1)$) ;
End.

4) Comme les deux suites v et w sont adjacentes, on sait qu'elles convergent toutes deux et, de plus, vers la même limite que nous nommerons, tout à fait au hasard, α. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (w_n - \alpha) = 0 \Rightarrow w_n - \alpha = o(1)$$

et, compte tenu du lien entre les suites u et w, on obtient :

$$u_n = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$$

5) Comme $o(1)$ est négligeable devant α, lui-même négligeable devant $2\sqrt{n}$, on obtient :

$$u_n \sim 2\sqrt{n} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4) Exercice

Les valeurs contenues dans la variable c sont :

- après le premier passage en boucle : $1 \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$
- après le deuxième passage en boucle : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a-1}{b-1} = \dfrac{a(a-1)}{b(b-1)}$
- après le troisième passage en boucle : $\dfrac{a(a-1)(a-2)}{b(b-1)(b-2)}$

et, ainsi de suite jusqu'à la sortie de la boucle, après b itérations, alors que i vaut b :
c contient alors $\dfrac{a(a-1)(a-2)...(a-b+1)}{b(b-1)(b-2)...(b-b+1)}$, expression dans laquelle on reconnaît :

$$\frac{A_a^b}{b!} = \binom{a}{b}$$

5) Exercice

1) Comme $\dfrac{-3}{4}$ n'appartient pas à I, la fonction f est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle de dénominateur non nul. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall\, x \in I \qquad f'(x) = \frac{-77}{(4x+3)^2}$$

donc f est strictement décroissante sur I. On a donc :

$$f(I) = f([0,25\,;6]) = [f(6); f(0,25)] = \left[\frac{26}{27}; \frac{81}{16}\right] \subset I$$

donc I est bien stable par f.

2) On a :

$$f(x) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^2 + 2x - 20 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2 \ \text{ ou } \ x = -\frac{5}{2}$$

mais cette dernière valeur n'appartient pas à I, donc 2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. De même :

$$\forall\, x \in I \qquad f(f(x)) = \frac{\dfrac{x+20}{4x+3} + 20}{4\dfrac{x+20}{4x+3} + 3} = \frac{81x + 80}{16x + 89}$$

Alors :

$$f(f(x)) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad 16x^2 + 8x - 80 = 0$$

qui est notoirement équivalente à l'équation précédente. Elle a donc, elle aussi, 2 pour unique solution.

3) Comme u_0 est élément de I, ce dernier intervalle étant stable par f, la suite u est bien définie et tous ses termes appartiennent à I.

4) La suite u n'est donc pas monotone. Ses deux suites extraites, celle des termes de rangs pairs et celle des termes de rangs impairs sont toutes deux monotones de sens contraires. Comme u_0 est le plus petit élément de I, on a $u_2 \geqslant u_0$, ce qui prouve que la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elles sont toutes deux bornées, elles sont convergentes. En outre, leurs limites, du fait de la continuité de $f \circ f$, sont solutions de $f \circ f(x) = x$. Cette dernière équation n'ayant qu'une solution, les deux suites extraites convergent toutes deux vers 2 et il en va de même pour u (et hop, la question suivante!!).

5) cf. supra

6)
```
Program attente;
Var
    n, i :  integer;
    p, u :  real;
Begin
    writeln('Choisissez un réel strictement positif inférieur à 1.');
    readln(p);
    u := 0.25;
    n := 0;
    while abs(u - 2) >= p do
        begin
        u := (u + 20)/(4 * u + 3);
        n := n + 1;
        end;
    writeln('Le premier entier n pour lequel on a |u(n) - 2| < ',p,') est',n);
End.
```

6) Exercice

Puisque n et p ne sont pas nuls, on a les relations :

$$n\,! = n \times (n-1)! \qquad \text{et} \qquad p\,! = p \times (p-1)!$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

et, en remarquant que $n - p = (n-1) - (p-1)$, on obtient :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$