

Mardi 15 décembre 2009 (8h45-11h45)

## 1) Exercice

---

*On n'effectuera pas explicitement les calculs.*

Combien y a-t-il de numéros de téléphone à dix chiffres contenant :

- 1) Deux fois le 1, deux fois le 3 et six fois le 7 dans un ordre quelconque ?
- 2) Deux chiffres différents et deux seulement ?
- 3) Trois chiffres 1 et trois seulement ?

## 2) Exercice

---

*On effectuera explicitement les calculs.*

Dans une maison il y a trois salons dénommés Clotho, Lachésis et Atropos. Une réception accueille trois hommes dont monsieur  $A$  et quatre femmes dont madame  $B$ .

- 1) De combien de façons les invités peuvent-ils se répartir dans les trois salons ?
- 2) Combien de répartitions regroupent monsieur  $A$  et madame  $B$  dans le même salon ?
- 3) Combien y a-t-il de dispositions dans lesquelles aucun homme ne se trouve avec une femme ?

## 3) Exercice

---

On considère les trois suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  définies sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad v_n = u_n - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

- 1) Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$
- 2) Démontrer que les suites  $v$  et  $w$  sont adjacentes.
- 3) Écrire un programme en turbo-Pascal qui demande un entier naturel non nul  $n$  à l'utilisateur et qui affiche la valeur de  $v_n$ .
- 4) Établir qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que, lorsque  $n$  tend vers plus l'infini, on ait :

$$u_n = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$$

- 5) Donner un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini. Quelle est la limite de la suite ?

## 4) Exercice

---

On considère le programme suivant :

```
Program  enigma;
Var
  a, b, i : integer;
  c : real;
Begin
  writeln('Choisissez un entier naturel non nul.');
```

readln(a);  
writeln('Choisissez un deuxième entier naturel non nul inférieur ou égal au précédent.');

readln(b);  
c := 1;  
for i := 1 to b do  
 c := c \* (a - i + 1) / (b - i + 1);  
write(c);

End.

Qu'affiche-t-il ?

## 5) Exercice

---

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0, 25; 6]$  par :

$$f(x) = \frac{x + 20}{4x + 3}$$

- 1) Étudier les variations de  $f$  et démontrer que l'intervalle  $I$  est stable par  $f$ .
- 2) Résoudre dans  $I$  les équations  $f(x) = x$  et  $f \circ f(x) = x$ .
- 3) Démontrer qu'en posant :

$$u_0 = 0,25 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

on définit une suite  $u$  d'éléments de  $I$ .

- 4) Étudier la monotonie de  $u$ .
- 5) Démontrer que la suite  $u$  est convergente.
- 6) Écrire un programme en turbo-Pascal qui demande un réel strictement positif  $p$  inférieur à 1 à l'utilisateur et qui affiche le premier entier  $n$  tel que l'on ait  $|u_n - 2| < p$ .

## 6) Exercice

---

On considère deux entiers naturels non nuls  $n$  et  $p$  tels que  $p \leq n$ . Démontrer que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$