1 ECE	**Concours blanc n°1**	**2009-2010**

Jeudi 7 janvier 2010 (8h-12h)

1) Exercice

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur un ensemble I que l'on déterminera.
On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1}.

2) Vérifier qu'il existe dans $[0\,;1]$ un réel unique noté α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$.
Montrer que $\alpha \neq 0$.

3) **a)** Écrire le corps d'un programme en turbo-Pascal demandant à l'utilisateur une précision p et affichant, grâce à la dichotomie, un encadrement de α d'amplitude strictement inférieure à p.

b) On note n le nombre de passages en boucle effectués par le programme précédent. Démontrer que :

$$2^{-n} < p \leqslant 2^{-n+1}$$

En déduire l'expression de n en fonction de p.
Calculer n lorsque $p = 10^{-4}$ $\left(\text{on donne : } \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \simeq 2,3\right)$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \alpha \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$

4) **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in [0\,;1]$.

b) Montrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$.
Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.

5) On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n.
On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $\qquad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n\, e^{-u_{n+1}}$.

b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n : $\qquad u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.

c) Montrer que $u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et en déduire que la suite de terme général S_n est convergente.
On note L sa limite. Montrer que $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.

d) Montrer finalement que $\qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-L}}{2^n}$.

2) Exercice

On effectuera les calculs de manière explicite.

Depuis le 15 avril 2009 a été mis en place un nouveau Système d'Immatriculation des Véhicules (SIV). À chacun est attribué définitivement un "code" composé de sept caractères alpha-numériques en trois blocs séparés par des tirets.
Le premier et le dernier blocs sont composés de deux lettres de l'alphabet (autres que O, I et U pour éviter les confusions avec 0, 1 et V). En outre, la séquence SS est proscrite dans un même bloc. Le bloc central est formé de trois chiffres, la seule combinaison interdite étant le 000.
L'incrémentation se fait en priorité sur les chiffres. Viennent ensuite les lettres traitées dans chaque bloc comme composant des mots de deux lettres classés dans l'ordre lexicographique.
L'incrémentation des blocs se fait en priorité sur celui de droite.
Ainsi, la première plaque a été AA-001-AA, suivie de AA-002-AA ...
On est ensuite passé de AA-999-AA à AA-001-AB, plus tard de AA-999-ZZ à AB-001-AA.

1) *Nombre de plaques*

- **a)** Combien y a-t-il de "mots" de deux lettres respectant les conditions édictées plus haut ?
- **b)** En déduire le nombre d'immatriculations SIV que permettra le nouveau règlement.

2) *Variétés*

- **a)** Combien rencontrera-t-on de plaques contenant quatre lettres toutes distinctes et trois chiffres tous différents ?
- **b)** Parmi les plaques SIV comportant, au centre, le 524, combien y en aura-t-il contenant exactement deux lettres identiques ?
- **c)** Combien aura-t-on de plaques palindromes (i.e. se lisant indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche comme "LAVAL" ou "Esope reste ici et se repose") ?

3) *Rangs* **(Cette question est hors barème)**

- **a)** Quelle a été le SIV du six cent millième véhicule ?
- **b)** Si votre plaque porte le DV-445-AB, combien de véhicules auront été immatriculés avant le vôtre ?

4) *Appendice*
On donne les résultats d'opérations suivants (tous ne seront pas utiles et il pourra y avoir besoin d'effectuer d'autres calculs) :

$$26^2 = 676 \qquad 23^2 = 529 \qquad 22^2 = 484 \qquad 99 = 100 - 1 \qquad 999 = 1000 - 1$$

$$484^2 = 234356 \qquad 528^2 = 278784 \qquad 529^2 = 279841 \qquad 675^2 = 455625$$

$$21 \times 22 \times 23 = 10626 \qquad 21 \times 22 \times 22 = 10164 \qquad 23 \times 528 = 12144$$

$$18 \times 528 = 9\,504 \qquad 8 \times 9 \times 21 \times 22 \times 23 = 765072$$

3) Exercice

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{2n+1} & = & f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} & = & g(u_{2n+1}) \end{cases}$$

1) Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{2n+1} > 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2n+2} > 0$$

2) Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ ont une solution commune et une seule. On note α cette solution.

3) Montrer que la fonction $\varphi = f \circ g$ est définie et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
Montrer que la fonction $\psi = \varphi \circ \varphi$ est définie et croissante sur $]1\,;+\infty[$. Calculer $\psi(\alpha)$.

4) **a)** Pour x élément de $]1\,;+\infty[$, déterminer les expressions de $\varphi(x)$ puis de $\psi(x)$.

b) Montrer que, pour tout élément x de $]1\,;\alpha[$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1}} > x$$

5) Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = u_{4n+1}$.

a) Montrer que $v_0 < \alpha$.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n : $\qquad v_{n+1} = \psi(v_n)$.

c) À l'aide du résultat de la question 4, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que, pour tout nombre entier naturel n :

$$1 < v_n \leqslant \alpha$$

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et trouver sa limite.

6) On considère les trois suites $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+4})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que ces suites s'expriment simplement à l'aide de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elles sont convergentes et trouver leurs limites.

7) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et trouver sa limite.

4) Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S = \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

1) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ (f'' est la dérivée seconde de f, i.e. la dérivée $(f')'$ de f').

b) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.

2) a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}$$

b) En déduire, sous forme de sigma, les expressions de $f'(1)$ et $f''(1)$.

3) En remarquant que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \qquad p^2 = \frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p$$

en déduire l'expression de S en fonction de n.

4) Écrire un programme en turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de n puis de p et qui affiche la valeur de :

$$\binom{2n}{2p}$$