

1) Exercice

- 1 - a - La fonction f est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables. On a :

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + \frac{3}{2}x = \frac{x(1-3x)}{2(1-x)}$$

La fonction f est donc croissante de 0 à M sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ et décroissante de M à $-\infty$ sur $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

- b - La fonction f étant positive ou nulle sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, on en déduit :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \quad \ln(1-x) \geq -x - \frac{3}{4}x^2$$

- 2 - a - Comme u_n s'obtient en "décumulant" la suite S , on reconnaît en u_n le terme général de la série dont la suite S est la suite des sommes partielles. Par télescopage, il est facile de remarquer que :

$$S_n - S_1 = \sum_{k=2}^n u_k \quad \text{donc} \quad S_n = \sum_{k=2}^n u_k$$

- b - On a :

$$u_n = \ln(n!) - n \ln n - \ln((n-1)!) + (n-1) \ln(n-1)$$

donc :

$$u_n = \ln n - n \ln n + (n-1) \ln(n-1) = (1-n) \ln n + (n-1) \ln(n-1)$$

d'où :

$$u_n = (n-1)[\ln(n-1) - \ln n] = (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Comme $1 - \frac{1}{n}$ est compris strictement entre zéro et un, son logarithme est strictement négatif. On en déduit que :

$$\forall n \in E \quad u_n < 0$$

La suite S est donc strictement décroissante.

c - Comme la fraction $\frac{1}{n}$ tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini, on peut écrire :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n} \quad \text{d'où} \quad u_n \sim -1$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$

d - Puisque u_n ne tend pas vers zéro, la série de terme général u_n est divergente.

e - Comme la suite S est décroissante elle a une limite. Comme elle ne converge pas, c'est que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

3 - a - La suite T est la suite des sommes partielles de la série de terme général v_n .

b - On a :

$$v_n = S_n + n - S_{n-1} - (n-1) = u_n + 1$$

et, comme u_n tend vers -1 , la limite de la suite v est nulle.

c - D'après la question **1 - b**, comme $n \geq 3$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$, on a :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq -\frac{1}{n} - \frac{3}{4n^2}$$

donc :

$$v_n \geq (n-1) \left(-\frac{1}{n} - \frac{3}{4n^2}\right) + 1 = \frac{1}{4n} + \frac{3}{4n^2}$$

Ainsi, en posant $w_n = \frac{1}{4n} + \frac{3}{4n^2}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \Rightarrow w_n \leq v_n \quad \text{et} \quad w_n \sim \frac{1}{4n}$$

d - Comme $\frac{1}{4n}$ est de signe fixe, la divergence de la série harmonique implique celle de la série de terme général w_n . Comme cette dernière est à termes positifs qui minorent ceux de la suite v_n , on en déduit que la série de terme général v_n diverge.

e - Cette dernière série étant divergente et à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers plus l'infini. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$$

2) Exercice

- 1 - La probabilité d'échec au premier essai est donnée dans l'énoncé, c'est p . Pour échouer au deuxième essai, il faut tout d'abord qu'il ait échoué au premier. La formule des probabilités composées donne :

$$P(\overline{R_2}) = P(\overline{R_2} \cap \overline{R_1}) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = p \frac{p}{2} = \frac{p^2}{2}$$

- 2 - Pour réussir au n -ième essai, il doit avoir échoué aux $n - 1$ premiers essais. On peut donc écrire :

$$R_n = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_{n-1}} \cap R_n$$

ce qui, grâce à la formule des probabilités composées, donne :

$$P(R_n) = p \frac{p}{2} \frac{p}{3} \dots \frac{p}{n-1} (1 - \frac{p}{n}) = \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 - \frac{p}{n}\right) = \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{p^n}{n!}$$

- 3 - On a :

$$n \frac{p^n}{n!} = p \frac{p^{n-1}}{(n-1)!}$$

et on reconnaît le terme général d'une série exponentielle, qui est convergente pour toute valeur de p . De même :

$$n \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} \sim (n-1) \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} = p \frac{p^{n-2}}{(n-2)!}$$

et l'argument précédent peut être renouvelé. Ainsi, $nP(R_n)$ est la somme des termes généraux de deux séries convergentes, donc la série de terme général $nP(R_n)$ est convergente. En outre, on peut écrire :

$$nP(R_n) = n \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - p \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} = (n-1+1) \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - p \frac{p^{n-1}}{(n-1)!}$$

donc :

$$nP(R_n) = p \frac{p^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - p \frac{p^{n-1}}{(n-1)!}$$

à condition que n soit supérieur ou égal à deux pour pouvoir effectuer la simplification par $n-1$. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(R_n) = P(R_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[p \frac{p^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - p \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

Comme les trois termes intérieurs au sigma sont ceux de séries convergentes, on peut éclater en trois sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(R_n) = (1-p) + p \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} - p \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p^{n-1}}{(n-1)!}$$

Après deux changements d'indice, il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(R_n) = (1-p) + p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n!} - p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n!}$$

et, finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(R_n) = 1 - p + p e^p + (e^p - 1) - p(e^p - 1) = e^p$$

Nous verrons plus tard que ce nombre représente le nombre d'essais moyen que le robot doit effectuer pour réussir.

3) Exercice

1 - Calculons :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\sqrt{1-x} dx = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x} dx$$

Mais l'intégrant est négatif ou nul sur $[0; 1]$ donc, comme $0 < 1$, on a :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0 \quad \text{d'où} \quad I_{n+1} \leq I_n$$

La suite I est donc décroissante.

2 - L'intégrant de I_n est positif ou nul sur $[0; 1]$ donc, comme $0 < 1$, on a : $I_n \geq 0$. D'autre part :

$$\forall x \in [0; 1] \quad \sqrt{1-x} \leq 1 \Rightarrow x^n \sqrt{1-x} \leq x^n$$

et, comme $0 < 1$:

$$I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ce qui achève la preuve de l'encadrement demandé.

3 - D'après le théorème d'encadrement, comme la suite de terme général $\frac{1}{n+1}$ tend vers zéro, il en va de même de la suite I .

4 - On a :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Pour I_1 , les fonctions en présence étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$, on a, par intégration par parties :

$$I_1 = \left[-x \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

5 - Les fonctions étant encore de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$, on obtient, à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}(n+1)x^n dx$$

Le crochet est nul, ce qui donne :

$$I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x} dx$$

soit, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)(I_n - I_{n+1})$$

d'où, après un léger toilettage :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$$

Pour $n = 0$, la relation obtenue donne :

$$\frac{4}{15} = \frac{2}{5} \frac{2}{3}$$

qui est bien vrai et, en remplaçant n par 1 :

$$I_2 = \frac{4}{7}I_1 = \frac{4}{7} \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$$

- 6 -** Pour écrire le programme, il vaut mieux décaler la formule de récurrence obtenue d'une unité (on substitue $n - 1$ à n). Il vient :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$$

On peut alors proposer cela :

Program integrale;

Var

a : real;

i, n : integer;

Begin

writeln('Que vaut n , entier supérieur ou égal à 1 ? ');

readln(n);

$a := 2/3$;

for $i := 1$ to n do $a := a * 2 * i / (2 * i + 3)$;

writeln('I(n ,') = ', a);

End.