

1) Exercice

1) La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ en tant que produit de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f'(x) = 2(1+x)e^x$$

Cette dérivée étant strictement positive sur $[0; 1]$, la fonction f y est strictement croissante. Comme, en outre, elle y est continue, elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle :

$$I = f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; 2e]$$

La bijection réciproque f^{-1} de f est strictement croissante de I vers $[0; 1]$.

2) On peut écrire :

$$\forall x \in [0; 1] \quad xe^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = f^{-1}(2)$$

Cette unique valeur sera notée α . Comme f^{-1} est bijective, on a :

$$2 \neq 0 \Rightarrow f^{-1}(2) \neq f^{-1}(0) \Rightarrow \alpha \neq 0$$

3) a) Program dichotomie ;

```

Var
  a, b, c, d, p : real ;
Begin
  a := 0 ;
  b := 1 ;
  writeln('Choisissez un réel strictement positif. ');
  readln(p) ;
  if p > 1 then writeln('0 < alpha < 1') else
    begin
      while b - a >= p do
        begin
          c := (a + b)/2 ;
          d := 2 * c * exp(c) ;
          if d < 0.5 then a := c else b := c ;
        end ;
      writeln(a, ' < alpha < ', b) ;
    end ;
End.
```

- b) À chaque passage dans la boucle, l'amplitude de l'encadrement est divisée par deux. Au début, elle est de 1 (en fait 1-0). S'il y a n passages, c'est que l'amplitude (qui a été divisée par 2^n) est devenue strictement inférieure à p . Au passage précédent, l'amplitude (valant $1/2^{n-1}$) était encore supérieure ou égale à p . On en déduit l'encadrement demandé. On résout alors les inéquations proposées :

$$2^{-n} < p \leq 2^{-n+1} \Leftrightarrow \ln(2^{-n}) < \ln p \leq \ln(2^{-n+1}) \Leftrightarrow -n \ln 2 < \ln p \leq (-n+1) \ln 2$$

puis, en divisant par $-\ln 2$ qui est négatif :

$$-\frac{\ln p}{\ln 2} < n \leq -\frac{\ln p}{\ln 2} + 1$$

On en déduit que :

$$n = \text{Ent} \left(-\frac{\ln p}{\ln 2} \right) + 1$$

Quand $p = 10^{-4}$, on a $-\ln p = 4 \ln 10 = 4(\ln 2 + \ln 5)$, donc :

$$n = \text{Ent} \left(4 \times \frac{\ln 2 + \ln 5}{\ln 2} \right) + 1 = \text{Ent} \left(4 + 4 \times \frac{\ln 5}{\ln 2} \right) + 1 = \text{Ent}(13, 2) + 1 = 14$$

- 4) a) Du fait de la croissance de f^{-1} , on a :

$$f^{-1}([0; 1]) \subset f^{-1}([0; 2]) = [0; \alpha] \subset [0; 1]$$

Ainsi, l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f^{-1} . Comme u_0 a été choisi dans $[0; 1]$, on en déduit que tous les termes de la suite existent et appartiennent à $[0; 1]$.

- b) On a :

$$f(x) - x = x(2e^x - 1)$$

Comme $x > 0$, il vient $2e^x - 1 > 2 - 1 = 1 > 0$. Ainsi on a bien la positivité de $f(x) - x$ dont la nullité ne peut provenir que de celle de x .

- c) Comme f^{-1} est croissante, la suite u est monotone. D'après la question précédente :

$$f(u_1) - u_1 \geq 0 \quad \text{donc} \quad u_0 \geq u_1$$

Ainsi, la suite u est décroissante. Pour que deux termes de cette suite soient égaux, il serait nécessaire et suffisant (toujours d'après la question précédente) que l'un des deux soit nul, ce qui ne se peut pas puisque $u_0 \neq 0$. La suite u est donc strictement décroissante.

- d) Étant décroissante et minorée (par zéro), la suite u est convergente. Sa limite, élément de $[0; 1]$, est solution de l'équation $f^{-1}(x) = x$ qui équivaut à $f(x) = x$ dont l'unique solution est zéro. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- 5) a) On peut écrire :

$$u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \Leftrightarrow u_n = f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_n = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$$

b) Notons, pour n entier naturel, $P(n)$ la propriété : $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

- Comme $S_0 = u_0 = \alpha$, on a $\frac{e^{-S_0}}{2^0} = e^{-\alpha} = \alpha = u_0$ et l'on a bien $P(0)$.
- Soit r un entier naturel tel que l'on ait $P(r)$. A-t-on $P(r+1)$?

L'hypothèse de récurrence nous apprend que $u_r = \frac{e^{-S_r}}{2^r}$. Alors :

$$u_{r+1} = \frac{1}{2} u_r e^{-u_{r+1}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-S_r}}{2^r} e^{-u_{r+1}} = \frac{e^{-S_r - u_{r+1}}}{2^{r+1}} = \frac{e^{-S_{r+1}}}{2^{r+1}}$$

ce qui prouve que l'on a bien la propriété au rang $r+1$.

Ainsi, la propriété est avérée sur \mathbb{N} .

c) On a :

$$S_n \geq 0 \Rightarrow -S_n \leq 0 \Rightarrow e^{-S_n} \leq 1 \Rightarrow u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit :

$$S_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante (puisque $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ avec $u_{n+1} \geq 0$) et majorée (par 2), est convergente. Sa limite L est encadrée par le premier terme $S_0 = \alpha$ (car la suite est croissante) et le majorant que nous venons de trouver, i.e. 2.

d) Calculons :

$$\frac{u_n}{\frac{e^{-L}}{2^n}} = \frac{e^{-S_n}}{2^n} \frac{2^n}{e^{-L}} = e^{-S_n + L}$$

expression qui tend vers $e^0 = 1$ puisque S_n tend vers L . On a donc bien :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-L}}{2^n}$$

2) Exercice

1) a) Une fois ôtées les trois lettres interdites, il ne reste plus que 23 des 26 lettres de l'alphabet. Elles permettent de constituer des 2-listes en nombre égal à 23^2 . De ces 529 mots de deux lettres il faut déduire la séquence SS qui est interdite. On obtient donc 528 possibilités pour le groupe de deux lettres de gauche, tout comme, d'ailleurs, pour celui de droite.

b) Il y a donc $528 \times 999 \times 528$ choix. Il faut multiplier 278 784 par $1000 - 1$, ce qui donne :

$$278\,784\,000 - 278\,784 = 278\,505\,216$$

2) a) Pour avoir quatre lettres toutes distinctes on effectue un arrangement de 4 lettres prises parmi 23. Pour les chiffres, il s'agit d'un arrangement de 3 chiffres parmi dix. Pas de risque alors d'obtenir les séquences interdites, SS et 000. On obtient donc :

$$A_{23}^4 \times A_{10}^3 = 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 10 \times 9 \times 8 = 765\,072 \times 200 = 153\,014\,400$$

b) Les chiffres, en fait, n'interviennent pas dans cette question. Les deux lettres identiques peuvent se trouver à gauche, à droite, ou l'une à gauche et l'autre à droite.

- À gauche : on choisit la lettre à répéter (22 possibilités). Pour la première lettre du bloc de droite, il y a 22 éventualités (car, ici, le S est acceptable) puis, pour la dernière il en reste 21. Cela fait :

$$22 \times 22 \times 21 = 10\,164$$

- À droite, il y a, bien sûr, le même nombre de possibilités.
- Si la lettre répétée est de part et d'autre du groupe de chiffres, on choisit un mot quelconque de deux lettres à mettre à gauche, parmi les 23×22 possibles. Ensuite, on choisit, parmi les deux lettres déjà utilisées, celle qui sera répétée, puis sa place, ce qui fait 4 manières. Enfin, on sélectionne la dernière lettre qui doit être différente des deux déjà retenues, laissant 21 façons. Pour ce cas, cela donne :

$$23 \times 22 \times 4 \times 21 = 10\,626 \times 4 = 42\,504$$

Le bilan donne :

$$2 \times 10\,164 + 42\,504 = 62\,832$$

c) Pour obtenir une plaque palindrome, on choisit un bloc quelconque de deux lettres pour le mettre à gauche, ce qui fait 528 possibilités. Pour le choix des deux premiers chiffres on doit, parmi les 100 façons, éviter seulement la séquence 00. La suite de la plaque est alors imposée. Le nombre de palindromes est donc :

$$528 \times 99 = 528 \times (100 - 1) = 52\,800 - 528 = 52\,272$$

3) a) De AA-001-AA à AA-999-ZZ le nombre de véhicules immatriculés est :

$$999 \times 528 = 528\,000 - 528 = 527\,472$$

Il en reste donc $600\,000 - 527\,472 = 72\,528$ à traiter.

De AB-001-AA à AB-999-AZ on en compte $999 \times 23 = 22\,977$. On peut procéder ainsi 3 fois, jusqu'à AA-999-CZ, ce qui laisse :

$$72\,528 - 3 \times 22\,977 = 72\,528 - 68\,931 = 3\,597$$

à immatriculer. De AB-001-DA à AA-999-DC il y en a $999 \times 3 = 2\,997$. Les 600 dernières conduisent à la plaque :

$$AB - 600 - DD$$

b) Nombre de plaques de AA-001-AA à CZ-999-ZZ :

$$3 \times 23 \times 999 \times 528 = 3 \times 12\,144 \times 999 = 36\,432 \times 999 = 36\,432\,000 - 36\,432 = 36\,395\,568$$

de DA-001-AA à DT-999-ZZ il y en a :

$$18 \times 999 \times 528 = 9\,504 \times 999 = 9\,504\,000 - 9\,504 = 9\,494\,496$$

puis, de DV-001-AA à DV-999-AA on a 999 numéros SIV et, enfin de DV-001-AB à DV-444-AB il y en a 444. Le résultat final est :

$$36\,395\,568 + 9\,494\,496 + 999 + 444 = 45\,891\,507$$

3) Exercice

1) Pour n entier naturel, notons $P(n)$ la propriété :

$$u_{2n+1} \text{ existe et } u_{2n+1} > 1, \quad u_{2n+2} \text{ existe et } u_{2n+2} > 0$$

- Comme $u_0 = 1$, on a $u_1 = f(u_0) = \sqrt{2} > 1$. Alors $u_1 \neq 1$ donc u_2 existe et $u_2 = g(u_1) > 0$.
- Soit r un entier naturel pour lequel $P(r)$ est vraie. A-t-on $P(r+1)$?

Par hypothèse de récurrence, nous savons que :

$$u_{2r+1} \text{ existe et } u_{2r+1} > 1, \quad u_{2r+2} \text{ existe et } u_{2r+2} > 0$$

Comme $u_{2r+2} > 0$, son image par f existe et elle est strictement supérieure à 1. Ainsi u_{2r+3} existe et $u_{2r+3} > 1$. Alors, l'image par g de u_{2r+3} existe et elle est strictement positive, ce qui prouve que u_{2r+4} existe et $u_{2r+4} > 0$. On a alors $P(r+1)$.

La propriété a donc été démontrée par récurrence sur \mathbb{N} .

2) Résolvons les deux équations :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1+x = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Comme x est élément de \mathbb{R}^+ , on a une solution unique $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De même :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = x \Leftrightarrow x = \alpha$$

car on débouche sur la même équation.

3) La fonction g est décroissante sur $]1; +\infty[$ et elle arrive dans $]0; +\infty[$, intervalle sur lequel f est définie et croissante. Ainsi, φ est définie et décroissante sur $]1; +\infty[$.

De façon analogue, φ arrivant dans $]1; +\infty[$, ψ est définie et croissante sur cet intervalle qui n'est autre que l'ensemble de départ de φ . Le nombre α étant un point fixe de f et de g , il l'est a fortiori de φ puis de ψ . Ainsi $\psi(\alpha) = \alpha$.

4) a) On a :

$$\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

puis :

$$\psi(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1}}$$

b) Résolvons l'inéquation proposée :

$$(I) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1}} > x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1} > x^2$$

opération possible car les deux membres étaient positifs. Comme il en est de même du dénominateur, on peut multiplier par ce dernier sans changer le sens de l'inégalité :

$$(I) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}} > x^2 \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 \right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}}(x^2 - 1) < x^2$$

Les deux membres sont encore positifs, donc :

$$(I) \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}(x-1)^2(x+1)^2 < x^4 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 < x^3$$

On a pu simplifier car $x > 0$. En développant, on obtient :

$$(I) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{\alpha}; \alpha[$$

et, comme on a résolu sur l'intervalle $]1; +\infty[$, on obtient finalement :

$$(I) \Leftrightarrow \psi(x) > x \Leftrightarrow x \in]1; \alpha[$$

5) a) On a :

$$v_0 = u_1 = f(u_0) = f(1) < f(\alpha) = \alpha$$

b)

$$v_{n+1} = u_{4n+5} = f(u_{4n+4}) = f(g(u_{4n+3})) = f(g(f(u_{4n+2}))) = f(g(f(g(u_{4n+1})))) = \psi(v_n)$$

c) Comme la fonction ψ est croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et que v_0 en est élément, la suite v , qui est associée à ψ , est monotone. D'après la question 4, nous savons que sur $]1; \alpha[$: $\psi(x) > x$. Une récurrence immédiate prouve que ψ ne peut pas "traverser" son point fixe α . Comme $v_0 < \alpha$, on a $v_n < \alpha$ pour tout entier naturel n . Enfin, toujours d'après la question 4, $v_1 = \psi(v_0) > v_0$, ce qui prouve que la suite v est croissante.

d) La suite v étant croissante et majorée, elle est convergente. Sa limite appartient à l'intervalle $]1; \alpha[$. La question 4 prouve que ψ n'a pas de point fixe dans $]1; \alpha[$. Ainsi, seul α peut prétendre au titre de limite de la suite v .

6) On a $u_{4n+2} = g(u_{4n+1}) = g(v_n)$. Comme g est continue en α , la suite $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(\alpha) = \alpha$. De même la suite $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha) = \alpha$ car $u_{4n+3} = f \circ g(u_{4n+2})$, puis $(u_{4n+4})_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $g(\alpha) = \alpha$ puisque $u_{4n+4} = g \circ f \circ g(v_n)$.

7) Les quatre suites précédentes sont extraites de la suite u . Elles ont toutes la même limite α . Enfin, l'ensemble de leurs indices recouvre l'ensemble des entiers naturels. En effet, quand on divise un entier naturel p par 4, le reste de la division ne peut valoir que 0, 1, 2 ou 3. Ainsi p est de l'une des quatre formes $4n = 4(n-1) + 4$, $4n+1$, $4n+2$ ou $4n+3$. Finalement, la suite u est convergente vers α .

4) Exercice

1) a) La fonction f est dérivable en tant que fonction polynôme. On a :

$$f'(x) = 2n(1+x)^{2n-1} + 2n(-1)(1-x)^{2n-1}$$

et, cette dernière fonction étant également polynôme, on peut, à son tour, la dériver :

$$f''(x) = 2n(2n-1)(1+x)^{2n-2} + 2n(2n-1)(-1)(-1)(1-x)^{2n-2}$$

b) On en déduit :

$$f'(1) = n \times 2^{2n} \quad \text{et} \quad f''(1) = n(2n - 1) \times 2^{2n-1}$$

2) a) En appliquant deux fois la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k x^k$$

La quantité $(-1)^k$ valant 1 lorsque k est pair et -1 quand k est impair, les monômes correspondant aux k impairs vont s'annuler. Quant à ceux pour lesquels k est pair, ils se cumuleront. On peut écrire :

$$f(x) = 2 \times \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

Les entiers pairs compris entre 0 et $2n$ sont de la forme $2p$ où p est un entier compris entre 0 et n . On peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} x^{2p}$$

b) On en déduit :

$$f'(x) = 2 \sum_{p=0}^n 2p \binom{2n}{2p} x^{2p-1} \quad \text{puis} \quad f''(x) = 2 \sum_{p=0}^n 2p(2p-1) \binom{2n}{2p} x^{2p-2}$$

et il vient :

$$f'(1) = 2 \sum_{p=0}^n 2p \binom{2n}{2p} \quad \text{puis} \quad f''(1) = 2 \sum_{p=0}^n 2p(2p-1) \binom{2n}{2p}$$

3) D'après la remarque du texte, on a :

$$S = \sum_{p=0}^n p^2 \binom{2n}{2p} = \sum_{p=0}^n \left[\frac{1}{4} 2p(2p-1) + \frac{1}{4} 2p \right] \binom{2n}{2p} = \frac{1}{8} f''(1) + \frac{1}{8} f'(1)$$

donc :

$$S = \frac{1}{8} [n(2n-1) \times 2^{2n-1} + n \times 2^{2n}] = \frac{1}{8} n 2^{2n-1} (2n-1+2)$$

et, finalement :

$$\sum_{p=0}^n p^2 \binom{2n}{2p} = n(2n+1) 2^{2n-4}$$

4) Program exo4;

Var

n, p, i : integer ;

a : real ;

Begin

writeln('Valeur de n ?');

```
readln( $n$ );  
writeln('Valeur de  $p$ ?');  
readln( $p$ );  
 $a := 1$ ;  
for  $i := 0$  to  $2 * p - 1$  do  $a := a * (2 * n - i) / (2 * p - i)$ ;  
writeln( $a$ );  
End.
```